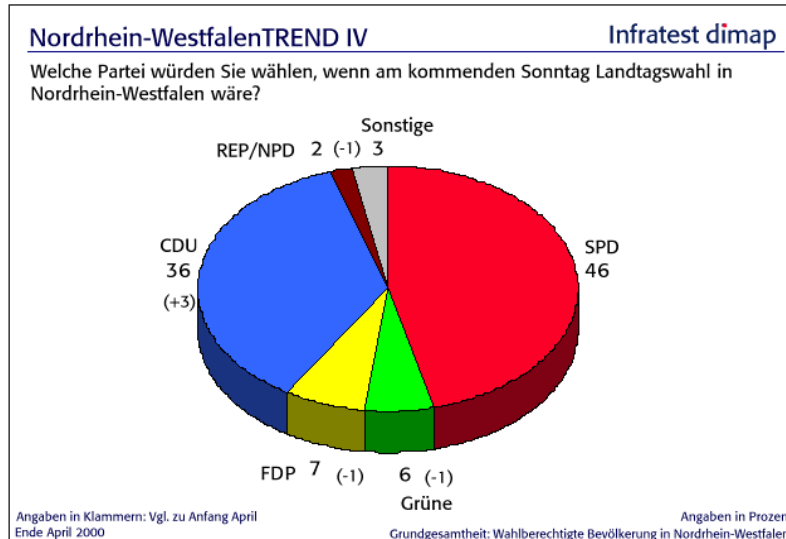


Konfidenzintervalle

Im April 2000 führte Infratest dimap unter 1000 Wahlberechtigten in NRW eine Umfrage zur bevorstehenden Landtagswahl durch. Bei den angegebenen Ergebnissen der Umfrage handelt es sich natürlich um relative Häufigkeiten. Für die SPD wurde dabei eine relative Häufigkeit von $h=46\%$ ermittelt. Die absolute Häufigkeit der SPD-Wähler betrug also $x=460$. Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass ein Wahlberechtigter die SPD wählt, ist natürlich nicht genau 46%. Sie liegt lediglich nahe bei 46%. Doch was heißt nun "nahe bei"?



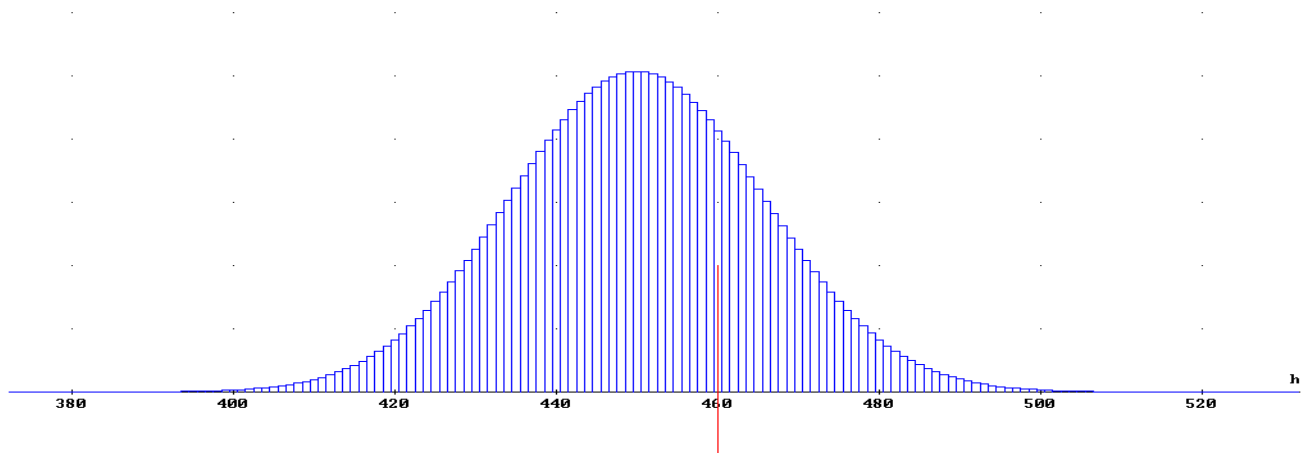
Ein Wert p für die tatsächliche Wahrscheinlichkeit kommt dann in Frage, wenn der Erwartungswert der entsprechenden Binomialverteilung nahe bei der in der Umfrage mit $n=1000$ Befragten ermittelten absoluten Häufigkeit $x=460$ liegt.

Die Zufallsgröße X beschreibt dann die Anzahl der SPD-Wähler. Sie ist $B-1000, p$ - verteilt.

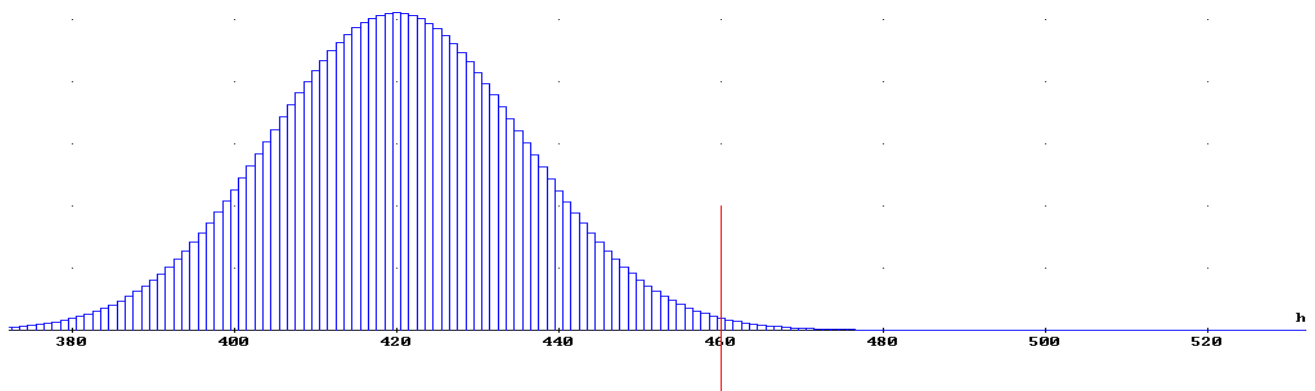
Aufgabe 1:

Entscheide für verschiedene Werte von p anhand der Balkendiagramme der Binomialverteilung, ob der zugrundeliegende Wert von p akzeptiert oder abgelehnt wird.

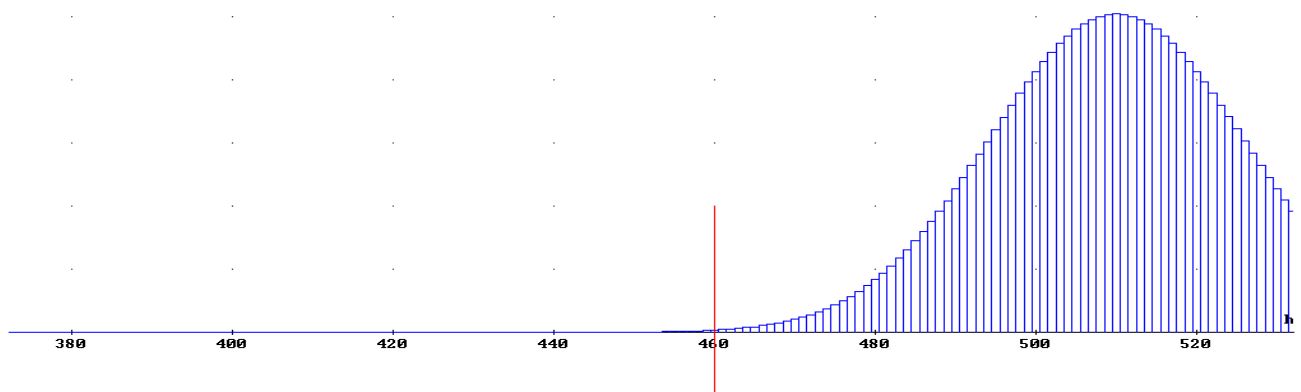
$p=0,45$:



$p=0,42$:



$p=0,51$:



Für die erste Verteilung liegt die absolute Häufigkeit $x=460$ nahe am Erwartungswert $np=450$. Bei der zweiten Verteilung mit $p=0.42$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=460)$ sehr klein. Der Erwartungswert $np=420$ liegt zu weit links von $x=460$. Der Erwartungswert der Binomialverteilung mit $p=0.51$ liegt zu weit rechts von $x=460$. Auch hier ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=460)$ sehr klein.

Entscheidungsregel: Falls $x=460$ innerhalb eines Bereiches um den Erwartungswert mit der Wahrscheinlichkeit von 95% liegt, wird die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit akzeptiert, anderenfalls wird sie abgelehnt. (Bei vorsichtigerer Vorgehensweise können wir natürlich statt eines 95%-Bereiches auch einen 99%-Bereich vorsehen.)

Ziel:

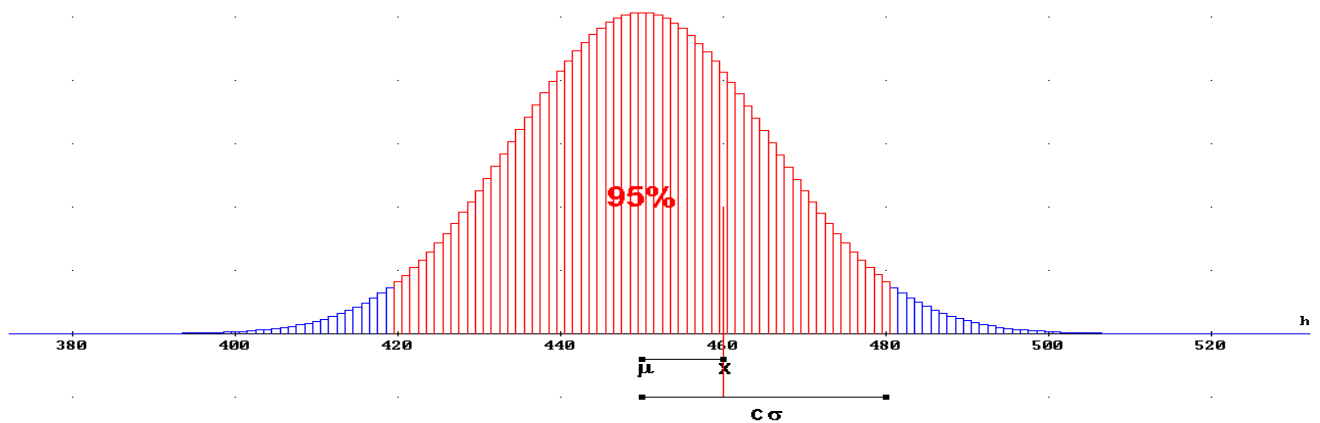
Wir suchen nach einer Möglichkeit, ein Intervall für die Wahrscheinlichkeit p zu bestimmen, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt.

Ein solches Intervall bezeichnen wir als das **Vertrauensintervall** für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p oder auch als **Konfidenzintervall**.

Die vorgegebene Wahrscheinlichkeit des Bereiches heißt **Vertrauenszahl** γ . Hier ist also $\gamma=0.95$.

Aufgabe 2:

Nach den "Sigma-Regeln" beträgt der Radius einer 95%-Umgebung um den Erwartungswert $1,96\sigma$.



Liegt die in der Umfrage ermittelte absolute Häufigkeit $x=460$ innerhalb des 95%-Bereichs, so gilt:

oder als Betragsgleichung $\mu - c\sigma \leq X \leq \mu + c\sigma$ mit $c=1,96$
 $|x - \mu| \leq c\sigma$
 In der zugrundeliegenden Binomialverteilung ist p unbekannt und soll nun bestimmt werden.

a) Wie verändert sich die Binomialverteilung wenn p verkleinert oder vergrößert wird. Skizziere ein Binomialgebirge mit der 1σ -Umgebung um μ für ein minimales und ein maximales zu akzeptierendes p . Begründe, dass $|460 - 1000 p| \leq 1,96 \sqrt{(1000 p (1 - p))}$ für das Einstiegsbeispiel zur Bestimmung des gesuchten Intervalls aufgestellt werden kann.

b) Löse diese Ungleichung durch Quadrieren und gib damit das Vertrauensintervall zur Vertrauenszahl $\gamma=0.95$ an.

c) Bestimme auch die Vertrauensintervalle zur Vertrauenszahl $\gamma=0.95$ für die Wahrscheinlichkeit einen Wähler der CDU, der FDP oder der Grünen anzutreffen.

d) Zeige: $P(|h - p| \leq c\sigma/n) = \gamma$

Aufgabe 3:

Mit zunehmendem Stichprobenumfang wird das Vertrauensintervall schmaler. Es ist sinnvoll, vor der Durchführung einer Umfrage den erforderlichen Stichprobenumfang für eine gewünschte Maximalbreite des Vertrauensintervalls abzuschätzen.

a) Zeige: $p(1-p) \leq 1/4$ für alle $p \in [0, 1]$

Für die Breite d des Vertrauensintervalls gilt damit:

$$2c\sigma = 2c\sqrt{np(1-p)} = 2c\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)} \leq 2c\sqrt{n} \frac{1}{2} = c\sqrt{n}$$

Soll diese Intervallbreite kleiner oder gleich der vorgegebenen Breite d sein, so gilt:

$$n \geq \frac{c^2}{d^2}$$

b) Berechne den mindestens erforderlichen Stichprobenumfang für eine maximale Breite des Vertrauensintervalls von $d=2.5\%$.