Related-Rates-Problems
– Aufgaben mit verketteten Änderungsraten –

Ein integrierendes Konzept für den Analysis-Unterricht

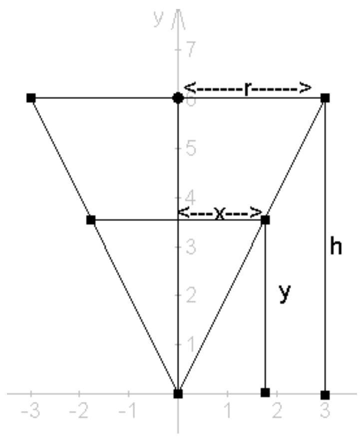
Heiner Platzbecker und Klaus Gerber

Related-Rates-Aufgaben sind im angelsächsischen Raum ein Standardaufgabentyp im Zusammenhang mit der Kettenregel der Differentialrechnung. Im deutschen Sprachraum sind sie nur sehr selten anzutreffen, obwohl sie zum Training von zentralen Aufgabenstellungen und zur Bewältigung von abitur-vergleichbaren Leistungsstandards gut geeignet sind. Die Anzahl dieser Aufgaben im Internet ist riesig.
Related-Rates-Aufgaben sind Aufgaben über Änderungsraten, die die Differential- und Integralrechnung verbinden. Sehr viele Themen der Analysis wie momentane Änderungsraten, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), Rotationskörper, Differentialgleichungen und Parameterkurven lassen sich auf verblüffend einfache Weise unter dem Gesichtspunkt einer Related-Rates-Aufgabe subsumieren.
Für Schüler stellen diese Aufgaben eine gut trainierbare Standardtechnik dar.
Historisch gehen diese Aufgaben auf George Pólya (Geboren: 13 Dez. 1887 in Budapest, Ungarn; Gestorben: 7. Sept. 1985 in Palo Alto, Kalifornien, USA), den Papst der Problem-Solving-Strategie, zurück.

Kapitel I Geometrisch orientierte Strategien

1 *Der trichterförmige Wassertank*
(Pólya 194 5; How to Solve It)

In einen trichterförmigen Wassertank läuft Wasser ein. Der Tank hat die Form eines auf der Spitze stehenden Kegels mit dem Radius r=5cm und der Höhe h=10cm. Die Zuflussgeschwindigkeit beträgt 9 cm^3/min.
Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserpegel, wenn die Füllhöhe gerade 6cm beträgt?



Lösung:

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Dabei soll die momentane Pegelgeschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ berechnet werden, wobei die Zuflussrate $\frac{dV}{dt} = 9\,\frac{cm^3}{\text{min}}$ bekannt ist.

Die Volumenfunktion mit dem Term $V(x,y) = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 y$ wird mithilfe der Ähnlichkeitsbeziehung $\frac{x}{y} = \frac{r}{h}$ zu $V(y) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^2}{h^2} y^3$.

Mit $\frac{dV}{dy} = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot y^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot y^2$ erhält man durch Umformung der Kettenregel $\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dy}} = \frac{9\,\frac{cm^3}{\text{min}}}{\frac{1}{4}\pi \cdot y^2}$.

Setzt man hier die Füllhöhe $y = 6cm$ ein, so erhält man die gesuchte Pegelgeschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\pi}\,\frac{cm}{\text{min}}$.

Didaktischer Kommentar:

Die Pólya-Aufgabe zeigt zwei entscheidende Aspekte der Related-Rates-Strategie:

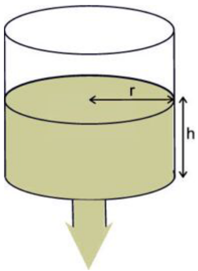
- **Related-Rates-Aufgaben sind Aufgaben zur Kettenregel der Differentialrechnung.**
- **Die zu betrachtenden Änderungsraten sind oft durch geometrische Zusammenhänge (im Beispiel durch die Superstrategie „Ähnlichkeit“) miteinander verbunden.**

Die Lösungsschritte lassen sich zu einem *Kochrezept* zusammenfassen:

1. *Fertige eine Zeichnung mit den relevanten geometrischen Größen an.*
2. *Notiere die gegebenen und die gesuchten Änderungsraten.*
3. *Formuliere die Kettenregel, die die Änderungsraten verknüpft.*
4. *Finde die unbekannte Änderungsrate in der Kettenregel mit geometrischen Hilfsmitteln (Ähnlichkeit, Pythagoras, Koordinatengeometrie).*
5. *Setze die gefundene Änderungsrate in die Kettenregel ein, und berechne die gesuchten Größen.*

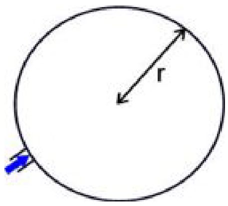
Da die Geometrie das Bindeglied zwischen den Änderungsraten herstellt, kann man einerseits klassische Mittelstufengeometrie (Kugel, Kegel, Prisma) in der Oberstufe wiederholen, zweitens geometrische Strategien der vorherigen Klassenstufen (Ähnlichkeit, Trigonometrie, Koordinatengeometrie) anwenden und schließlich Elemente der Integralrechnung (Kugelkappe, Kegelstumpf, Rotationskörper) einbauen. Dies bildet vielfältige Möglichkeiten auch für Abiturthemen.

Dieser Aufgabentyp muss nun an vielfältigen Beispielen trainiert werden:



2 *Der zylinderförmige Wassertank*

Aus einem zylinderförmiger Wassertank mit dem Radius r=20cm läuft Wasser aus. Die Ausflussgeschwindigkeit beträgt 3 Liter pro Sekunde. Wie schnell fällt der Wasserspiegel? Lösung



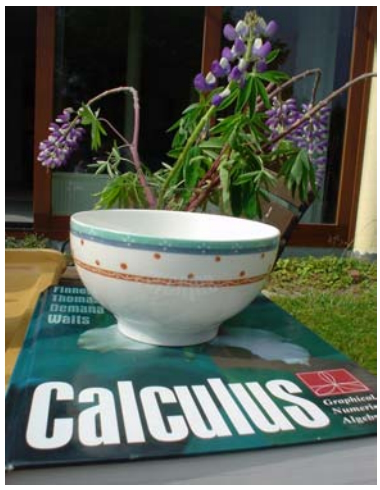
3 *Die Seifenblase*

Wie schnell ändert sich der Radius einer stets kugelrunden Seifenblase, wenn man 10 cm^3 Luft pro Sekunde hineinpustet und der Radius 1cm beträgt?
Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich bei diesem Radius die Oberfläche? Lösung

4 *Befüllung einer Cappucchino-Tasse (eines Kegelstumpfs)*

Sonntags nimmt H.P. aus F. seinen Kaffee aus einer Cappuccino-Tasse zu sich. Diese ist eine Kegelstumpftasse, die 10cm hoch ist. Der kreisförmige Boden hat den Radius r=3cm, die kreisförmige obere Öffnung hat den Radius R=5cm.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn 2cm^3 pro Sekunde eingefüllt werden und die Flüssigkeitshöhe gerade 2cm beträgt?
Zeige zunächst, mit oder ohne Integralrechnung: $V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(r^2 + rR + R^2\right)$. Lösung

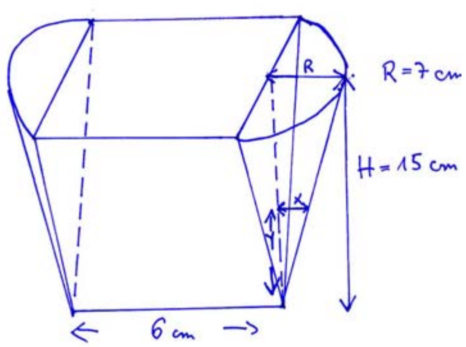
5 *Befüllung einer französischen Halbkugeltasse (Bol)*



Franzosen trinken ihren Kaffee aus einer Bol. Dies ist eine halbkugelförmige Tasse ohne Henkel. Unsere Bol hat den Radius 7cm. Sie wird mit 20cm^3 heißem Kaffee pro Sekunde gefüllt.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe gerade 2cm beträgt?
Zeige zunächst mit Hilfe der Integralrechnung, dass das Volumen einer Kugelkappe mit dem Kugelradius R und der Höhe h mit der Formel $V_{Kugelkappe} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$ berechnet werden kann.
Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich bei dieser Füllhöhe die Oberfläche? Lösung

6 *Entleerung eines Kaffeefilters*

Ein realistischer Kaffeefilter besteht aus einem Prisma mit zwei seitlich angesetzten Halbkegeln. Die Maße des Filters können der Zeichnung entnommen werden. Aus dem Filter fließen $2cm^3$ Kaffee pro Sekunde heraus.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe im Filter gerade 2cm beträgt? Lösung



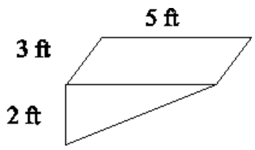
Ähnliche, wie die obigen Aufgaben, findet man an vielen Stellen im Internet. Beispielhaft übernehmen wir zwei Aufgaben der „Alvirne High School“ (Quelle):

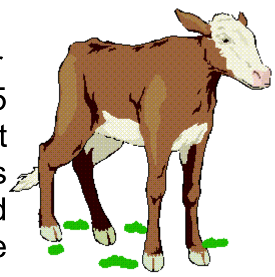
7 *Problem #10 is submitted by Angela Murphy*

While on vacation in Mexico, a tanker accident has spilled oil in the Gulf of Mexico. Scuba Steve volunteered to help by spreading oil-eating bacteria which is gobbling 7 ft^3 per hour. The oil slick has the form of a circular cylinder. When the radius of the cylinder is 250 feet, the thickness of the slick is 0.02 feet and decreasing at a rate of 0.002 ft/hr.

1. At what rate is the area of the circular top of the slick changing at this time?
2. Is the area of the slick increasing or decreasing? Lösung

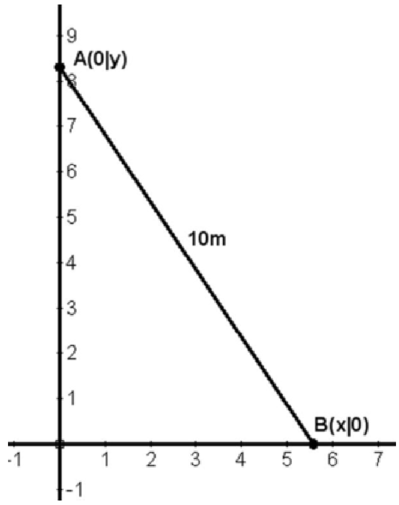
8 *Problem #11 (1999-2000) is submitted by Mike Brucker*





Wocertine's trough is being filled with food at a rate of 25 cubic inches per minute. If the trough is 2 feet tall, 3 feet wide, and 5 feet long, and the depth gradually decreases from 2 feet to 0 feet, at what rate is the level of the food rising when there is 2 cubic feet of food already in the container? (Be careful of units!) Lösung

Kapitel II *Related-Rates-Aufgaben in Modellen, die nicht nur geometrische Körper betrachten*



1 *Die rutschende Leiter*

Wolfgang steht etwas wackelig auf der obersten Sprosse einer schräg gegen die Hauswand gelehnten 10m langen Leiter und späht nach seinen Hühnern. Plötzlich gerät die Leiter ins Rutschen. Die Spitze der Leiter verliert 4m pro Minute an Höhe. Die nette Lea steht 6m von der Hauswand entfernt. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fußes der Leiter, wenn dieser Lea trifft?

Lösung:

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Dabei soll die Geschwindigkeit des Leiterfußes $\frac{dx}{dt}$ berechnet werden,

wobei die Geschwindigkeit der Leiterspitze $\frac{dy}{dt} = -4\,\frac{m}{\min}$ bekannt ist.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $x = \sqrt{100m^2 - y^2}$

Mit $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{100m^2 - y^2}} \cdot (-2y)$ erhält man durch Einsetzen in die

Kettenregel $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{100m^2 - y^2} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Für den fraglichen Moment mit $x = 6m$ gilt nach Pythagoras $y = 8m$ und

damit: $\frac{dx}{dt} = -\frac{8m}{\sqrt{100m^2 - 64m^2}} \cdot \left(-4\,\frac{m}{\min}\right) = \frac{16}{3}\,\frac{m}{\min}$

Weiterführende Zusatzaufgabe:

Auf welcher Kurve bewegt sich der Mittelpunkt der Leiter beim Abrutschen? Lösung

Didaktischer Kommentar:

Auch hier können die Lösungsschritte wieder nach der Aufstellung der Kettenregel wie oben beschrieben erfolgen.
Für die Aufstellung der Ansätze (im Beispiel: Satz des Pythagoras), mit deren Hilfe die betrachteten Änderungsraten verbunden werden können, ist im allgemeinen eine gewisse Flexibilät erforderlich.

2 *Das Hagen-Poiseuilleschen-Gesetz*

Das Hagen-Poiseuilleschen-Gesetz besagt anschaulich: Durch ein Rohr mit doppeltem Radius fließt 16mal so viel Flüssigkeit wie durch ein Rohr mit einfachem Radius. ($v = k \cdot r^4$)
Ein Herzinfarktpatient erhält ein Venen erweiterndes Medikament, um den Blutdruck zu verringern. Nach Verabreichung des Medikamentes wächst der Radius der Venen um 1% pro Minute. Um wie viel Prozent wird die Durchflussmenge ν pro Minute zunehmen? Lösung

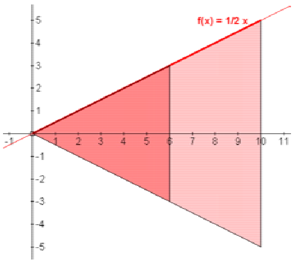
3 *Das Konvoi-Problem*

Zwei Trucker verlassen das Depot mit ihren LKWs. Der erste fährt mit 80 km pro Stunde ostwärts, der zweite mit 60 km pro Stunde in nördlicher Richtung.
Mit welcher Geschwindigkeit nimmt die Entfernung der beiden Trucks zu? Lösung

Kapitel III *Related-Rates-Aufgaben* in Verbindung mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1 *Die Pólya-Aufgabe mit dem HDI*

Ein Glas entsteht durch die Rotation des Graphen zu $f(x)=\frac{1}{2}x$ im Intervall [0; 10]. Nun wird das Glas mit der Spitze nach unten aufrecht gestellt und mit Wein gefüllt. Die Zuflussgeschwindigkeit beträgt 9 cm^3/min. Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit, wenn die Füllhöhe 6cm beträgt?



Lösung:
Das Gesamtvolumen des Kegels ist für die Berechnung der Änderungsraten unerheblich. Die Berandungsfunktion des Kegels hat den Term $f(x)=\frac{1}{2}x$. f und f^2 sind stetig.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Integralfunktion mit dem Term $V(x)=\pi\cdot\int_0^x (f(t))^2\,dt$ differenzierbar und es gilt $\frac{dV(x)}{dx}=V'(x)=\pi\cdot(f(x))^2=\pi\cdot\frac{1}{4}x^2$.

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet: $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$. Mit den gegebenen Daten erhält man $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\pi}\frac{cm}{s}$.

Didaktischer Kommentar:

Diese Aufgabe kennzeichnet exemplarisch einen neuen (erweiterten) Typ einer Related-Rates-Aufgabe: Die zu betrachtenden Änderungsraten werden nun nicht mehr rein geometrisch in der Kettenregel verbunden, anstelle der geometrischen Strategie tritt jetzt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Pólya-Aufgabe lässt sich jetzt als Teil der erweiterten Strategie auffassen. Der HDI wird so zur Superstrategie zur Verbindung der Änderungsraten in Related-Rates-Aufgaben.

I. Der klassische Pólya-Kegel wird um 90° im Uhrzeigersinn gedreht.
II. Die Differentialschreibweise sollte möglichst früh in den Unterricht integriert werden. Alle Computeralgebrasysteme verwenden sie. Im Hinblick auf die Substitutionsregel der Integralrechnung ist dies sinnvoll.

Dieser neue Aufgabentyp muss nun an weiteren Beispielen trainiert werden:

2 *Das Colani-Glas*

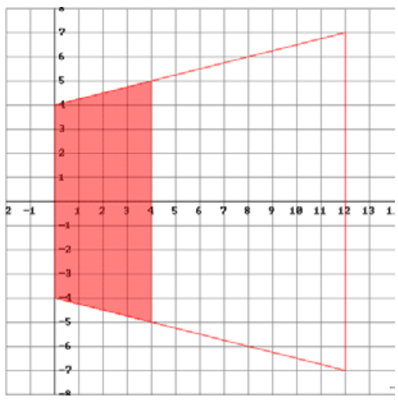
Der Rand eines 16*cm* hohen Designer-Glases wird durch eine quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt (8|4) und den weiteren Punkten (0|6) und (16|6) beschrieben (Längeneinheit: 1*cm*). Das Glas wird nun so aufgestellt, dass seine Rotationssymmetrieachse senkrecht steht. Jetzt wird das Glas mit der konstanten Füllrate 1 Liter pro Minute gefüllt.

a) Berechne das Rotationsvolumen des Glases.
b) Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit, wenn das Glas 6 cm hoch gefüllt ist.
c) Berechne die maximale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher Füllhöhe wird sie erreicht?
d) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit beim Füllen des Glases?

3 *Die Sektschale*

Der Graph der Funktion mit dem Term $f(x)=x^3-3x^2$ rotiert im Intervall [0;1,5] um die x-Achse und erzeugt dabei eine Sektschale. Eine Längeneinheit beträgt ein Dezimeter. Die Schale wird aufrecht mit der Spitze nach unten stehend mit Sekt gefüllt. Die Zuflussgeschwindigkeit beträgt $2dm^3/s$. Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit, wenn die Pegelhöhe 1 dm beträgt.

4 *Eine Schüssel für Chips am Abend wird zweckentfremdet*



Wenn die Fläche zwischen der A(0|4) und B(12|7) verbindenden Strecke und der x-Achse über dem Intervall [0;12] um die x-Achse rotiert entsteht eine Schale. In der Abbildung erscheint sie um 90° gedreht. ($1LE \mathrel{\hat{=}} 1cm$)

a) Berechne das Volumen der Schale mit Hilfe der Integralrechnung und mit Methoden der Mittelstufe.
b) Die Schale wird nun aufrecht gestellt, so dass die große Öffnung nach oben zeigt.
c) In die Schale läuft Wasser mit einer Zuflussgeschwindigkeit von 5ml/s hinein. Nach welcher Zeitspanne ist die Schale voll?
d) Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserspiegel, wenn das Wasser 4cm hoch steht?

5 *Eine Vase*

Durch die Rotation des Graphen zu $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ um die x-Achse entsteht eine Vase, wenn der Graph nur im ersten Quadranten betrachtet wird. Eine Längeneinheit beträgt ein Dezimeter. Die Vase wird nun so aufgestellt, dass ihre Rotationssymmetrieachse senkrecht steht. Die „Spitze" steht im Ursprung und an der obersten Stelle wird die Vase mit einem kleinen Loch versehen. Sie wird mit der konstanten Rate 1 Liter pro Minute gefüllt.

a) Wie lange dauert der Füllprozess?
b) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
c) Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher „Höhe" wird sie erreicht?

6 *Das Silo*

Durch die Rotation des Graphen zu f(x)=sin(x)+2 im Intervall [0;5] um die x-Achse entsteht, aufrecht hingestellt, ein Silo (Längeneinheit: m). Dieses wird mit der konstanten Rate 2 Kubikmeter pro Minute gefüllt.

a) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
b) Berechne die extremalen momentanen Pegelgeschwindigkeiten. Bei welcher „Füllhöhe" werden sie erreicht?

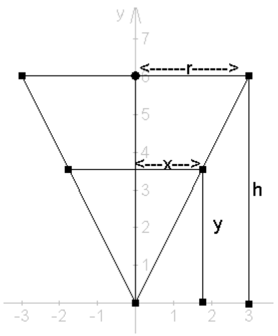
7 *Der Weinkelch*

Die Punkte P(0|2) und R(4|1) begrenzen eine Strecke. Vom Punkt R zum Punkt T(9|3) verläuft der Graph einer Funktion vom Typ mit dem Term $a + b \cdot \sqrt{x}$. Durch die Rotation der stückweise definierten Funktion um die x-Achse entsteht ein Weinkelch, der aufrechtstehend gefüllt wird (Längeneinheit: 1cm). Die Füllrate beträgt $1\text{cm}^3/\text{s}$. In welcher Höhe beträgt die momentane Pegelgeschwindigkeit $\frac{16}{25\pi}\frac{cm}{s}$?

8 *Eine exponentielle Vase*

a) Durch die Rotation des Graphen zu f(x)= x·exp(-x) um die x-Achse im Intervall[0;6] entsteht eine flache Vase. Diese wird aufrecht hingestellt und mit 1l/Min befüllt. Eine Längeneinheit beträgt 1dm.
Wie lange dauert der Füllprozess? Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit? Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher „Höhe" wird sie erreicht?
b) Löse die Aufgabe a) für die Funktionsschar mit dem Term $f(x) = x^n \cdot \exp(-x)$ (n = 1,2,3,4,5). Auf welcher Ortskurve liegen die minimalen momentanen Pegelgeschwindigkeiten?

Kapitel IV *Veränderliche Raten - Related-Rates als Sprungbrett zu Differentialgleichungen*



1 *Der trichterförmige Wassertank mit veränderlichem Zufluss - Die Pólya-Aufgabe mit veränderlichem Zufluss*

In den kegelförmigen Wassertank (Radius: 5*cm*, Höhe: 10*cm*) aus dem Einstiegsbeispiel, der klassischen Pólya-Aufgabe, läuft nun Wasser mit der veränderlichen Zuflussgeschwindigkeit $\frac{dV}{dt} = t$ zu (Zeiteinheit: 1*s*).

Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit 3*s* nach dem Start des Zuflusses.

Lösung:

Wieder ist die Pegelgeschwindigkeit $\dfrac{dy}{dt}$ zu berechnen, wobei die Zuflussrate $\dfrac{dV}{dt} = t$ gegeben ist. Die Zulaufrate nimmt hier linear mit der Zeit zu. Auf die Betrachtung der Einheiten in den Rechnungen wird der Übersichtlichkeit halber verzichtet.

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet wie oben: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt}$.

Mit dem bereits berechneten Kegelvolumen $V(y) = \frac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{r^2}{h^2} y^3$ und der Ableitungsfunktion $\dfrac{dV}{dy} = \pi \cdot \dfrac{r^2}{h^2} \cdot y^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot y^2$ erhält man durch Umformung der Kettenregel $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dy}} = \dfrac{4t}{\pi \cdot y^2}$.

Die entstandene Differentialgleichung wird mittels Separation der Variablen gelöst. Dazu integrieren wir $y^2 \cdot y' = \dfrac{4t}{\pi}$.

Es folgt: $\int y^2 \cdot y' \, dt = \int \dfrac{4t}{\pi} \, dt + c \Leftrightarrow \frac{1}{3} y^3 = \dfrac{2t^2}{\pi} + c$

Wenn für $t = 0$ die Füllhöhe 0*cm* beträgt, ist die Integrationskonstante $c = 0$ und wir können die Lösungsfunktion der Differentialgleichung durch Auflösen nach y bestimmen: $y(t) = \sqrt[3]{\dfrac{6t^2}{\pi}} = \sqrt[3]{\dfrac{6}{\pi}} \cdot t^{\frac{2}{3}}$

Ihre Ableitungsfunktion beschreibt die Pegelgeschwindigkeit:

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \tfrac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot t^{-\frac{1}{3}} = \tfrac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{\pi \cdot t}}$$

$3s$ nach dem Start des Zuflusses beträgt die gesuchte

Pegelgeschwindigkeit $y'(3s) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \frac{cm}{\min} \approx 0{,}57 \frac{cm}{\min}$.

Didaktischer Kommentar:

Die Annahme zeitabhängiger Zuflussraten erweitert das Spektrum möglicher Aufgabenstellungen und denkbarer Anwendungen. Die Related-Rates-Aufgaben führen dann zu Differentialgleichungen zur Bestimmung der momentanen Pegelgeschwindigkeit.
Dies ermöglicht sogar, die Füllhöhe und die Pegelgeschwindigkeit explizit als Funktion der Zeit zu bestimmen, wohingegen die Pegelgeschwindigkeit bisher nur als Funktion der Füllhöhe angegeben werden konnte.
Bei den Differentialgleichungen beschränken wir uns auf solche, die durch Separation der Variablen gelöst werden können.

2 *Der Luftballon mit veränderlichem Zufluss*

Wir betrachten nun einen zunächst leeren Luftballon in den Luft mit der sich ändernden Zuflussgeschwindigkeit von $\frac{dV}{dt} = 2 \cdot t$ in $\frac{ml}{s}$ einströmt.

Der Luftballon soll dabei stets eine Kugelform haben.

a) Wie groß ist der Radius des Luftballons nach $3s$?
b) Wie schnell ändert sich der Radius des Luftballons nach $3s$?
c) Wann hat der Luftballon das Volumen von $400cm^3$? Lösung

Kapitel V *Related-Rates-Aufgaben bei Parameterkurven*

1 *Martin Gardners verrückte Eieruhr*

Die abgebildete Gardnersche Eieruhr verblüfft jeden Zuschauer. Sie ist nicht nur ein physikalisches Faszinosum, sondern auch ein Related-Rates-Knüller:

K = { (x;y) | $x = \varphi(t) = \sin(t), y = \psi(t) = \sin(2t)$ }

ist die Parameterdarstellung einer Lissajous Figur.

a) Zeichne diese Lissajous-Figur mit DERIVE.
Beschreibe einen Zusammenhang mit der Gardnerschen Eieruhr.
Was sind eigentlich Lissajous-Figuren?

b) Zeige: Eine explizite Darstellung für y = f(x) lautet
$y_1 = f_1(x) = 2x \cdot \sqrt{(1-x^2)}$ bzw. $y_2 = f_2(x) = -2x \cdot \sqrt{(1-x^2)}$.

c) Durch die Rotation des Graphen von f_1 um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper (1 Einheit = 1dm) . Berechne das Volumen dieses Körpers.

Der Rotationskörper wird jetzt so aufgestellt, dass seine Rotationssymmetrieachse senkrecht steht. Die „Spitze“ steht im Ursprung (vgl. rechtes Photo). Wie in Gardners verrückter Eieruhr soll jetzt $\frac{\pi}{30}$ Liter Sand pro Minute in diesen Körper fließen.

d) Berechne die Fülldauer.

e) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?

f) Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher Höhe x wird sie erreicht?

---

g) Für mathematische Gourmets: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Lissajous-Figuren und Chebyscheff-Polynomen?

Lösung:

a) Lissajous-Figuren sind Kurven, die bei der Zusammensetzung zweier aufeinander senkrechter harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenz entstehen.

b) y = sin(2t) = 2sin(t)cos(t). Mit cos(t) = $+\sqrt{\left(1-t^2\right)}$ bzw.
cos(t) = $-\sqrt{\left(1-t^2\right)}$ folgt die Behauptung.

c) V_{rot}= $V_{rot} = \pi \cdot \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx = \frac{8 \cdot \pi}{15} l$.

d) Fülldauer=Volumen/Füllgeschwindigkeit = 8 Minuten .

e) Die mittlere Pegelgeschwindigkeit beträgt also $\frac{1}{8} \frac{dm}{\min}$.

f) Der Graph zu $f(x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$ hat den Hochpunkt H ($\sqrt{\frac{1}{2}}$ I 1) . Also

hat auch $\frac{dV}{dx} = \pi \cdot 4x^2(1-x^2)$ die Maximalstelle x_{max} = $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$\frac{dx}{dt}$ hat somit die Minimalestelle $\sqrt{\frac{1}{2}}$. $\frac{dx}{dt}$ hat dann den Wert $\frac{1}{30} \frac{l}{\min}$.

Didaktischer Kommentar:

Der Einsatz von Computeralgebrasystemen bereichert die Untersuchung allgemeiner Kurven im Analysis-Unterricht. Dadurch können neue Fragestellungen die alten Kurvendiskussionen ablösen.
In einigen europäischen Ländern (z.B. Frankreich) gehören diese Aufgaben zum Standardrepertoire in Abiturprüfungen.

2 *Die gemeine Zykloide*

Die gemeine Zykloide ist die einfachste Rollkurve der Welt.
K = { (x,y) | x = $\varphi(t) = t - \sin(t), y = \psi(t) = 1 - \cos(t), t \geq 0$} ist die Parameterdarstellung der gemeinen Zykloide.

a) Zeichne die Zykloide mit DERIVE.
b) Bestimme die Bogenlänge der gemeinen Zykloide im Intervall [0;2π].
Tipp: Zeige: $1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$
c) Zeige: $\frac{dy}{dx} = \cot(t/2)$

3 *Die Parabola nodata*

K={ (x,y) | $x = \varphi(t) = t^2, \quad y = \Psi(t) = \frac{1}{4} \cdot t \cdot \left(4 - t^2\right), t \geq 0$ } ist die Parameterdarstellung eines Astes der Knotenparabel oder der Parabola nodata.

a) Bestimme eine explizite Darstellung von y = f(x).
b) Bestimme die Extrema des Graphen von f.
c) Bei der Rotation um die x-Achse erzeugt der Graph eine spitze Birne, wenn man diesen nur im ersten Quadranten betrachtet. Berechne das Volumen der Birne (eine Einheit = 1dm).
d) Die Birne wird so aufgestellt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Der Bauch der Birne ist dabei unten. Es sollen jetzt $\frac{\pi}{3}$ Liter Wasser pro Minute in diesen Körper fließen. Berechne die Fülldauer.
e) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
f) Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher Höhe x wird sie erreicht?

4 *Martin Gardner trifft Jacob Bernoulli via DERIVE*

Der DERIVE-befehl

$[[2\cdot\sqrt{(t+t^2})$,$2\cdot\sqrt{(t-t^2})$$]$,$[-2\cdot\sqrt{(t+t^2})$,$-2\cdot\sqrt{(t-t^2})$$]$,

$[2\cdot\sqrt{(t+t^2})$,$-2\cdot\sqrt{(t-t^2})$$]$,$[-2\cdot\sqrt{(t+t^2})$,$2\cdot\sqrt{(t-t^2})$$]]$

erzeugt eine Bernoulli-Kurve.

a) Zeichne mit Derive diese Bernoulli-Kurve. (Für mathematische Gourmets: Dies ist nicht die Kurve, die sich auf dem Grabstein des Jacobus Bernoulli im Basler Münster befindet).
b) Formuliere für die obige Kurve eine zu Aufgabe1) analoge Related-Rates-Aufgabe und löse sie.

Kapitel VI *Experimentelle Untersuchungen*

In den vorangegangen Kapiteln wurden Füllvorgänge untersucht. Dabei waren meist die Zuflussraten bekannt. In einem mathematischen Modell konnte dann die Geschwindigkeit, mit der der Flüssigkeitspegel steigt, berechnet werden. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sollen nun experimentell überprüft werden.

Die Anforderung an die Durchführung des Experiments besteht darin, die Füllhöhe im Verlauf des Füllvorgangs oftmals zu ermitteln, so dass anschließend ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Zeit und der Füllhöhe angegeben werden kann.
Für die dynamische Aufzeichnung der Füllhöhe eignet sich das Videoanalyseprogramm *VIANA3.64*. Es steht im Internet unter http://didaktik.physik.uni-essen.de/viana/ zum kostenlosen Download zur Verfügung. Es ist einfach und auch für Schüler intuitiv zu bedienen. Die technischen Anforderungen an die Ausstattung beschränken sich auf eine sogenannte *Firewire-Schnittstelle* am Computer und eine digitale Videokamera.
Mit der Videokamera wird dann zunächst der Füllvorgang gefilmt. Das Video wird dann auf die Festplatte des PCs übertragen. Dazu benötigt man eine Videoschnittsoftware wie z.B. den bei WindowsXP enthaltenen *MovieMaker* oder das kommerzielle Programm *PinnacleStudio*. Auf der Festplatte des PC sollte dann ein kurzes Video im *avi*-Format vorhanden sein. Als Beispiele wurden hier die Füllung eines Kölschglases und einer Glaskaraffe aufgezeichnet. Die Videos stehen in einer komprimierten Version im Internet zur Verfügung. Sie können mit dem Programm VIANA manuell ausgewertet werden.

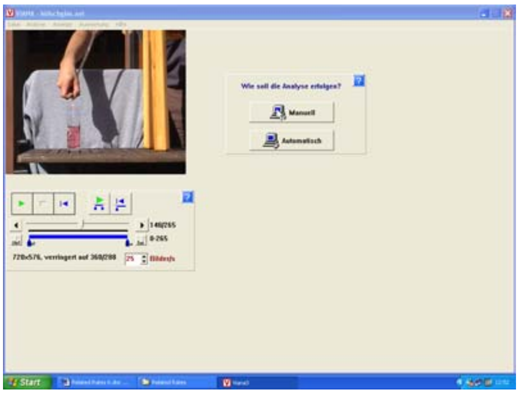
koelschglaskurz.avi

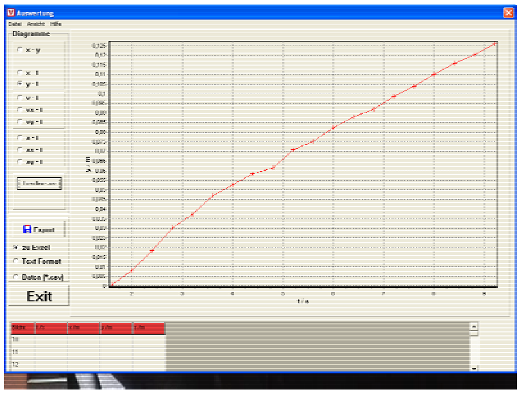
litroflaschekurz.avi

1 *Befüllung des Kölschglases*

Bestimme die Pegelgeschwindigkeit bei der Befüllung des Kölschglases experimentell. Vergleiche das Ergebnis mit einem mathematischen Modell, bei dem die Form eines Zylinders für das Kölschglas angenommen wird. (Tatsächlich sind Kölschgläser Kegelstümpfe.) Maße des Glases: Gesamthöhe 15*cm*, Innendurchmesser 4,6*cm*

Lösung:
Bei der Auswertung des Videos wird eine Längenkalibrierung mit der bekannten Höhe des Kölschglases von 25*cm* vorgenommen und der Nullpunkt am Boden des Kölschglases festgelegt. Nach Abschluss der Aufnahme der Messpunkte können die Ergebnisse ausgewertet werden.



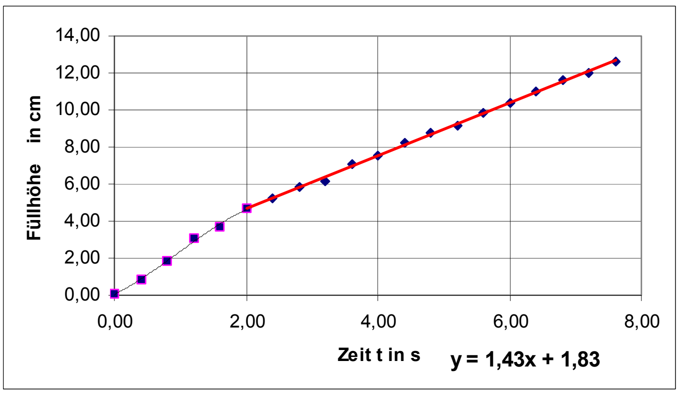


Dazu empfiehlt es sich, die Daten nach Excel zu exportieren:

t/s	y/m	t_{korr} /s	y/cm
1,6	0,00063	0,00	0,06
2	0,00823	0,40	0,82
2,4	0,01835	0,80	1,84
2,8	0,03038	1,20	3,04
3,2	0,03734	1,60	3,73
3,6	0,04683	2,00	4,68
4	0,05253	2,40	5,25
4,4	0,05822	2,80	5,82
4,8	0,06139	3,20	6,14
5,2	0,07088	3,60	7,09
5,6	0,07531	4,00	7,53
6	0,08227	4,40	8,23
6,4	0,08797	4,80	8,80
6,8	0,09176	5,20	9,18
7,2	0,09873	5,60	9,87
7,6	0,10379	6,00	10,38
8	0,11012	6,40	11,01
8,4	0,11581	6,80	11,58
8,8	0,12024	7,20	12,02
9,2	0,12594	7,60	12,59

In dem erzeugten Tabellenblatt werden zunächst alle überflüssigen Zellen gelöscht. Die Daten in den Spalten **t/s** und **y/m** wurden mit VIANA aufgezeichnet. Nach jeweils 0,4s wurde dabei die Füllhöhe y in der Einheit Meter ermittelt. In der Spalte **t_{korr}/s** sind die Zeitpunkte aus der ersten Salte so normiert worden, dass zu Beginn der Aufzeichnung t=0 gilt. In der letzten Spalte ist die Füllhöhe y in cm umgerechnet worden.

Die Veranschaulichung der Daten in einem Diagramm zeigt, dass die Pegelgeschwindigkeit erst nach 2 Sekunden konstant ist. Die Steigung des Graphen kann als Pegelgeschwindigkeit gedeutet werden.



Für den Zeitraum $2s \le t \le 7{,}6s$ liefert Excel die Gleichung einer linearen Regressionsgerade. Der Flüssigkeitspegel steigt also im betrachteten Zeitraum mit einer Geschwindigkeit von

$$\underline{\underline{\tfrac{dy}{dt} = 1{,}43\,\tfrac{cm}{s}}}.$$

Die Pegelgeschwindigkeit kann auch mit den bekannten Verfahren in einem mathematischen Modell berechnet werden. Dazu nehmen wir an, dass das Kölschglas die Form eines Zylinders mit dem Radius 2,3cm hat. Im betrachteten Zeitintervall beträgt die Zuflussgeschwindigkeit:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\pi \cdot (2{,}3cm)^2 \cdot (12{,}59cm - 4{,}68cm)}{7{,}2s - 2{,}0s} \approx 25{,}28\,\tfrac{cm^3}{s}$$

Die Kettenregel lautet hier: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

Mit dem Zylindervolumen $V = \pi \cdot r^2 \cdot y$ und $r = 2{,}3cm$ folgt

$$\frac{dV}{dy} = \pi \cdot (2{,}3cm)^2 \approx 16{,}62cm^2$$

Nun kann die Pegelgeschwindigkeit berechnet werden:

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dy}} \approx 1{,}52\,\tfrac{cm}{s}}}$$

Das Ergebnis stimmt gut mit dem experimentellen Wert überein.

2 *Befüllung einer Glaskaraffe*

Bestimme die Pegelgeschwindigkeit bei der Befüllung der Karaffe experimentell. Vergleiche das Ergebnis mit einem geeigneten mathematischen Modell, bei dem die Karaffe als Rotationskörper mit einer geeigneten Randfunktion untersucht wird.
Im Video wird die Litermarkierung bei einer Höhe von 19*cm* erreicht.
Gesamthöhe der Karaffe: 26*cm*

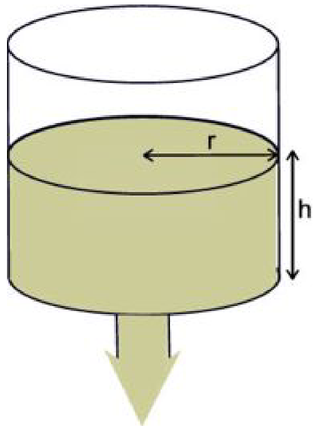
Didaktischer Kommentar:

Natürlich können nun weitere geeignete Körper untersucht werden. Dabei ist der Vergleich zwischen den realen Beobachtungen und den mathematischen Modellen von besonderem Reiz. Allerdings stellt die verwendete Videoanalysetechnik und auch die Auswertung der Daten eine hohe Anforderung dar. Insbesondere die benötigte Zeit sollte nicht unterschätzt werden. Diese Ergänzung der rein mathematischen Vorgehensweise erscheint damit z.B. für eine Facharbeit gut geeignet.

Anhang *Lösungen der Aufgaben*

I 2 *Der zylinderförmige Wassertank*

Aus einem zylinderförmiger Wassertank mit dem Radius $r = 20cm$ läuft Wasser aus. Die Ausflussgeschwindigkeit beträgt 3 Liter pro Sekunde.
Wie schnell fällt der Wasserspiegel?



Lösung:

1. Zeichnung:
2. Gegebene Änderungsrate: $\frac{dV}{dt} = -3000\,\frac{cm^3}{s}$

   Gesuchte Änderungsrate: $\frac{dh}{dt}$
3. Kettenregel: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$
4. Es gilt: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 400cm^2 \cdot h$ Ableiten ergibt: $\frac{dV}{dh} = \pi \cdot 400cm^2$
5. Einsetzten in die Kettenregel: $-3000\,\frac{cm^3}{s} = \pi \cdot 400cm^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

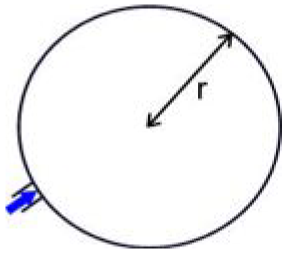
   Auflösen nach der unbekannten Änderungsrate:
   $$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000\, cm^3/s}{\pi \cdot 400cm^2} = -\frac{7{,}5}{\pi}\,\frac{cm}{s} \approx -2{,}39\,\frac{cm}{s}$$

Der Wasserspiegel fällt mit einer Geschwindigkeit von etwa 2,39 Zentimetern pro Sekunde.

I 3 *Die Seifenblase*

> *Wie schnell ändert sich der Radius einer stets kugelrunden Seifenblase, wenn man 10 cm³ Luft pro Sekunde hineinpustet und der Radius 1cm beträgt?*

Lösung



1. Zeichnung:
2. Gegebene Änderungsrate: $\frac{dV}{dt} = 10\,\frac{cm^3}{s}$

   Gesuchte Änderungsrate: $\frac{dr}{dt}$
3. Kettenregel: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$
4. Es gilt: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Ableiten ergibt: $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$
5. Einsetzten in die Kettenregel: $10\,\frac{cm^3}{s} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$

   Auflösen nach der unbekannten Änderungsrate: $\frac{dr}{dt} = \frac{10\,\frac{cm^3}{s}}{4\pi r^2} = \frac{5\,\frac{cm^3}{s}}{2\pi r^2}$

   Für $r = 1cm$: $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{2\pi}\,\frac{cm}{s} \approx 0{,}796\,\frac{cm}{s}$

Der Radius nimmt mit einer Geschwindigkeit von etwa 0,796 Zentimetern pro Sekunde zu.

> *Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich bei diesem Radius die Oberfläche?*

Lösung:

2. Gegebene Änderungsrate: $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{2\pi}\,\frac{cm}{s}$

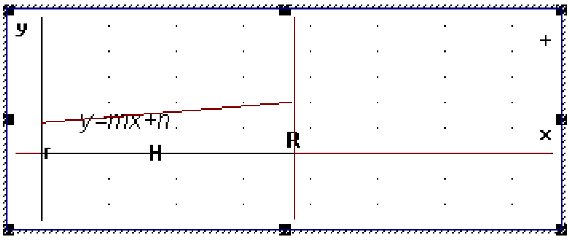
   Gesuchte Änderungsrate: $\frac{dA}{dt}$
3. Kettenregel: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$
4. Es gilt: $A = 4\pi r^2$ Ableiten ergibt: $\frac{dA}{dr} = 8\pi r$
5. Einsetzten in die Kettenregel: $\frac{dA}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{5}{2\pi}\,\frac{cm}{s} = 20r\,\frac{cm}{s} = 20\,\frac{cm^2}{s}$

Der Oberflächeninhalt nimmt mit einer Geschwindigkeit von 20 Quadratzentimetern pro Sekunde zu.

I 4 *Befüllung einer Cappucchino-Tasse*

Sonntags nimmt H.P. aus F. seinen Kaffee aus einer Cappuccino-Tasse zu sich. Diese ist eine Kegelstumpftasse, die 10cm hoch ist. Der kreisförmige Boden hat den Radius r=3cm, die kreisförmige obere Öffnung hat den Radius R=5cm.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn 2cm^3 pro Sekunde eingefüllt werden und die Flüssigkeitshöhe gerade 2cm beträgt? Zeige zunächst, mit oder ohne Integralrechnung: $V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(r^2 + rR + R^2\right)$.

Lösung:



$$V := \pi \cdot \int_0^h (m \cdot x + n)^2 \, dx$$

$$\frac{\pi \cdot h \cdot (h^2 \cdot m^2 + 3 \cdot h \cdot m \cdot n + 3 \cdot n^2)}{3}$$

Ersetzt man m durch (R-r)/h und n durch r, so erhält man nach einigen Umformungen $V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(r^2 + rR + R^2\right)$. Man kann auch einfach die Volumina zweier Kegel voneinander subtrahieren.

Die Zuflussrate beträgt $\frac{dV}{dt} = 2\,\frac{cm^3}{s}$.

Ferner lautet die Kettenregel der Differentialrechnung $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Gesucht ist die momentane Änderungsrate $\frac{dh}{dt}$, also die Pegelgeschwindigkeit. Ferner gilt für das momentane Kegelstumpfvolumen $V_{Kegelstumpf} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(r^2 + rR' + R'^2\right)$ mit $R' = \frac{1}{5}h + 3$. Mit r =3cm erhält man für das momentane Kegelstumpfvolumen $V(h) = 9 \cdot \pi \cdot h + \frac{3}{5} \cdot \pi \cdot h^2 + \frac{1}{75}\pi \cdot h^3$. Dies ergibt $\frac{dV}{dh}$(h=2cm) = 11.56π cm^2 und damit $\frac{dh}{dt}$ = 0.055...cm/s.

I 5 *Befüllung einer französischen Halbkugeltasse (Bol)*

Franzosen trinken ihren Kaffee aus einer Bol. Dies ist eine halbkugelförmige Tasse ohne Henkel. Unsere Bol hat den Radius 7cm. Sie wird mit 20cm^3 heißem Kaffee pro Sekunde gefüllt.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe gerade 2cm beträgt? Zeige zunächst mit Hilfe der Integralrechnung, dass das Volumen einer Kugelkappe mit dem Kugelradius R und der Höhe h mit der Formel $V_{Kugelkappe} = \frac{1}{3}\pi \cdot h^2 \cdot (3R - h)$ berechnet werden kann.
Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich bei dieser Füllhöhe die Oberfläche?

Lösung:

$$V_{rot} = \pi \cdot \int_0^h \left(R^2 - (x-R)^2\right)dx = \pi \cdot \int_0^h \left(2xR - x^2\right)dx = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3R - h).$$

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet in diesem Fall: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

$\frac{dV}{dh} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h - \pi \cdot h^2$ ergibt mit den gegebenen Werten $24 \cdot \pi$ cm^2. Damit ergibt sich für die momentane Änderungsrate $\frac{dh}{dt}$ der Wert 0.265...cm/s.

Mithilfe des Satzes des Pythagoras ergibt sich für den momentanen Radius x der Flüssigkeitsoberfläche $x^2 = R^2 - (R - h)^2$ $A = \pi \cdot x^2 = \pi \cdot (2Rh - h^2)$.

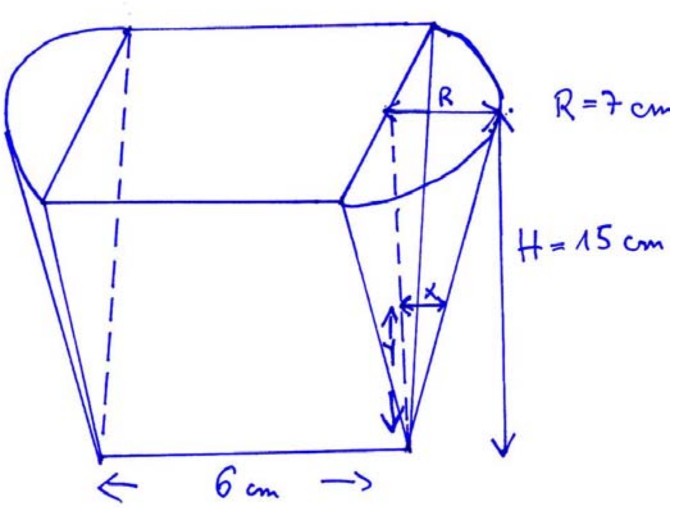
Die Kettenregel der Differentialrechnung ergibt mit: $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ und den obigen Zwischenschritten $\frac{dA}{dt} = 10\pi cm \cdot 0.265 \frac{cm}{s}$ = 8.33... cm^2 /s.

Didaktische Bemerkung:
Man kann diese Bol natürlich auch als kugelförmigen Tank auffassen. Dieser habe ein festes Volumen und wird befüllt. Fragt man nicht nur nach den Änderungsraten sondern auch in welcher Höhe ein bestimmtes Volumen eingelaufen ist, dann erhält man eine kubische Gleichung, die man im Allgemeinen mit dem Newton-Verfahren löst.

I 6 *Entleerung eines Kaffeefilters*

Ein realistischer Kaffeefilter besteht aus einem Prisma mit zwei seitlich angesetzten Halbkegeln. Die Maße des Filters können der Zeichnung entnommen werden.
Aus dem Filter fließen 2cm^3 Kaffee pro Sekunde heraus.
Wie groß ist die Pegelgeschwindigkeit des Kaffees, wenn die Flüssigkeitshöhe im Filter gerade 2cm beträgt?

Lösung:



$V_{Filter}(x,y) = V_{Prisma} + V_{Kegel} = 6A_{Dreieck} + V_{Kegel} = 6xy + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y$.

Mit der Nebenbedingung x = $\frac{R}{H} \cdot y = \frac{7}{15} y$ (Ähnlichkeit oder Koordinaten-geometrie) ergibt dies den Funktionsterm V(y) = $\frac{42}{15} y^2 + \frac{49}{675} \cdot \pi \cdot y^3$.

Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet in diesem Fall: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$.

$\frac{dV}{dy} = \frac{84}{15} y + \frac{49}{225} \pi \cdot y^2$ ergibt mit y = 2 den Wert 13.936...cm^2 und damit für die Pegelgeschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = \frac{2cm^3 / s}{13.936...cm^2}$ =0.143...cm/s.

I 7 *The SOLUTION to Problem # 10 is:*

1.) $V = \pi r^2 h \qquad \frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} h + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

$$-7 = 2\pi(250)\frac{dr}{dt}(0.02) + \pi(250)^2(-0.002)$$

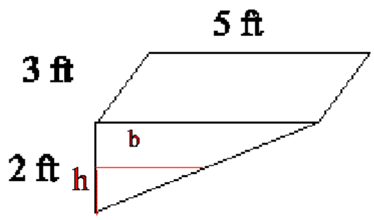
$$\frac{dr}{dt} = 12.27718308 \text{ ft/hr}$$

$$A = \pi r^2 \qquad \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(250)(12.27718308) = 19284.954 \text{ ft}^2/\text{hr}$$

2.) The area of the slick is increasing since the derivative is positive.

I 8 *The SOLUTION to Problem # 11 is:*



Change all dimensions to inches:

$$V = \frac{1}{2}bh(36) = 18bh \qquad \text{but} \quad \frac{b}{h} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2} \qquad \text{so} \quad 2b = 5h \quad b = \frac{5h}{2}$$

$$V = 18\left(\frac{5h}{2}\right)h = 45h^2 \qquad \frac{dV}{dt} = 90h\frac{dh}{dt}$$

$$\text{when} \quad V = 2 \text{ ft}^3 = 3456 \text{ in}^3 \qquad h = \sqrt{76.8} \qquad \text{so} \qquad 25 = 90\sqrt{76.8}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.032 \text{ in/min} \quad \text{or} \quad 0.003 \text{ ft/min}$$

II 2 *Das Hagen-Poiseuilleschen-Gesetz*

Das Hagen-Poiseuilleschen-Gesetz besagt anschaulich: Durch ein Rohr mit doppeltem Radius fließt 16mal so viel Flüssigkeit wie durch ein Rohr mit einfachem Radius. ($v = k \cdot r^4$)
Ein Herzinfarktpatient erhält ein Venen erweiterndes Medikament, um den Blutdruck zu verringern. Nach Verabreichung des Medikamentes wächst der Radius der Venen um 1% pro Minute. Um wie viel Prozent wird die Durchflussmenge v pro Minute zunehmen?

Lösung:

Die Änderungsrate des Venenradius beträgt $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{100} r \frac{1}{\text{min}}$.

Aus $v = k \cdot r^4$ folgt $\frac{dv}{dr} = 4 \cdot k \cdot r^3$. Hier lautet die Kettenregel $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$.

Damit erhält man für die Änderungsgeschwindigkeit der Durchflussmenge

$\frac{dv}{dr} = 4 \cdot k \cdot r^3 \cdot \frac{1}{100} r \frac{1}{\text{min}} = \frac{4}{100} \cdot k \cdot r^4 \frac{1}{\text{min}} = \frac{4}{100} v \frac{1}{\text{min}}$. Sie nimmt also um 4% pro Minute zu.

II 3 *Das Konvoi-Problem*

Zwei Trucker verlassen das Depot mit ihren LKWs. Der erste fährt mit 80 km pro Stunde ostwärts, der zweite mit 60 km pro Stunde in nördlicher Richtung. Mit welcher Geschwindigkeit nimmt die Entfernung der beiden Trucks zu?

Lösung:

Die momentane Entfernung s(t) beträgt $s(t) = \sqrt{(80t)^2 + (60t)^2} = 100t$ *km*

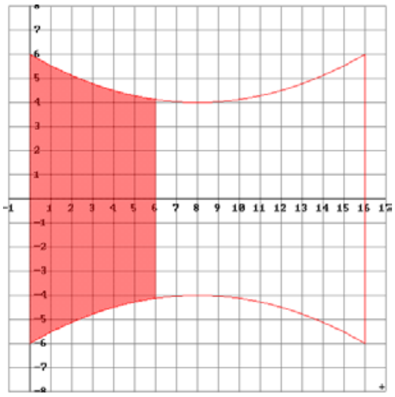
(dabei wird t in Stunden gemessen). Daraus folgt: $\frac{ds}{dt} = 100$ *km/h.*

III 2 Das Colani-Glas

Der Rand eines 16*cm* hohen Designer-Glases wird durch eine quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt (8|4) und den weiteren Punkten (0|6) und (16|6) beschrieben (Längeneinheit: 1cm). Das Glas wird nun so aufgestellt, dass seine Rotationssymmetrieachse senkrecht steht. Jetzt wird das Glas mit der konstanten Füllrate 1 Liter pro Minute gefüllt.

a) Berechne das Rotationsvolumen des Glases.
b) Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit, wenn das Glas 6 cm hoch gefüllt ist.
c) Berechne die maximale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher Füllhöhe wird sie erreicht?

Lösung:



Zunächst muss der Funktionsterm der Berandungsfunktion des Rotationskörpers mit einer Steckbriefaufgabe bestimmt werden. Man erhält leicht $f(x) = \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{2}x + 6$.

a) $V = \pi \cdot \int_0^{16} (f(x))^2 dx = \frac{5312}{15}\pi\ cm^3 \approx 1112{,}5 cm^3$

b) Die Kettenregel lautet: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Nach dem HDI ist die Integralfunktion mit dem Term $V(x) = \pi \cdot \int_0^x (f(t))^2 dt$ differenzierbar und es gilt $\frac{dV(x)}{dx} = V'(x) = \pi \cdot (f(x))^2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{2}x + 6\right)^2$.

Dies ergibt für die momentane Pegelgeschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dx}} = \frac{1000}{\pi \cdot \left(\frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{2}x + 6\right)^2}\frac{cm}{min}.$$

Bei einer Füllhöhe von 6*cm* beträgt sie etwa $18{,}7 \frac{cm}{min}$.

c) Die Nullstelle der Ableitung des Terms für die momentane Pegelgeschwindigkeit ist x=8*cm*. Die Prüfung der hinreichenden Bedingung ergibt hier ein lokales Maximum mit einer Pegelgeschwindigkeit von etwa $19{,}9 \frac{cm}{min}$. Da die Pegelgeschwindigkeit an den Rändern des Intervalls [0;16] niedriger ist, liegt bei x=8*cm* auch ein absolutes Maximum vor.

d) Die gesamte Füllzeit beträgt $\Delta t = \frac{1112{,}5 cm^3}{1000 \frac{cm^3}{min}} \approx 1{,}1125 \min$.

Damit berechnet man die mittlere Pegelgeschwindigkeit zu

$$\frac{16 cm}{1{,}1125 \min} \approx 14{,}38 \frac{cm}{min}.$$

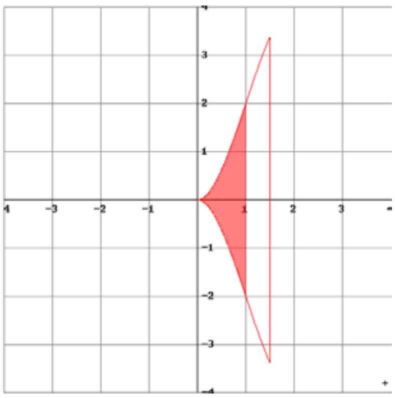
III 3 *Die Sektschale*

Der Graph der Funktion mit dem Term $f(x)=x^3-3x^2$ rotiert im Intervall [0;1,5] um die x-Achse und erzeugt dabei eine Sektschale. Eine Längeneinheit beträgt ein Dezimeter. Die Schale wird aufrecht mit der Spitze nach unten stehend mit Sekt gefüllt. Die Zuflussgeschwindigkeit beträgt $2dm^3/s$. Berechne die momentane Pegelgeschwindigkeit wenn die Pegelhöhe 1 dm beträgt.

Lösung:

Das Gesamtvolumen des Glases ist für die Berechnung der Änderungsraten unerheblich. Die Kettenregel der Differentialrechnung lautet: $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$.

Die Berandungsfunktion der Schale hat den Term $f(x) = x^3 - 3x^2$. f und f^2 sind stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Integralfunktion mit dem Term $V(x)=\pi\cdot\int_0^x (f(t))^2\,dt$



differenzierbar und es gilt

$\frac{dV(x)}{dx}=V'(x)=\pi\cdot(f(x))^2=\pi\cdot(x^3-3x^2)^2$.

$\frac{dV}{dx}$ beträgt an der Stelle x=1dm nun $4\cdot\pi\ dm^2$.

Dies ergibt für die momentane Pegelgeschwindigkeit

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\pi}\frac{dm}{s}$.

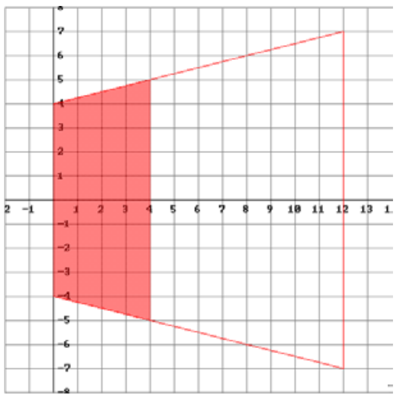
III 4 *Eine Schüssel für Chips am Abend wird zweckentfremdet*

Wenn die Fläche zwischen der A(0|4) und B(12|7) verbindenden Strecke und der x-Achse über dem Intervall [0;12] um die x-Achse rotiert entsteht eine Schale. In der Abbildung erscheint sie um 90° gedreht. ($1LE \mathrel{\hat{=}} 1cm$)

a) Berechne das Volumen der Schale mit Hilfe der Integralrechnung und mit Methoden der Mittelstufe.
b) Die Schale wird nun aufrecht gestellt, so dass die große Öffnung nach oben zeigt.
c) In die Schale läuft Wasser mit einer Zuflussgeschwindigkeit von 5ml/s hinein. Nach welcher Zeitspanne ist die Schale voll?
d) Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserspiegel, wenn das Wasser 4cm hoch steht?

Lösung:

Der Funktionsterm der Berandungsfunktion lautet $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4$.



a) $V = \pi \cdot \int\limits_0^{12} (f(x))^2\, dx = 372\pi\ cm^3 \approx 1168{,}67 cm^3$

Alternative: Kegelstumpfvolumen

b) Die gesamte Füllzeit beträgt

$$\Delta t = \frac{1168{,}67 cm^3}{5 \frac{cm^3}{s}} \approx 233{,}73 s\ .$$

c) $$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dx}} = \frac{5}{\pi \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 4\right)^2} \frac{cm}{s}$$

Bei einer Füllhöhe von $4cm$ beträgt die Pegelgeschwindigkeit etwa $0{,}06 \frac{cm}{s}$.

III 5 *Eine Vase*

Durch die Rotation des Graphen zu $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ um die x-Achse entsteht eine Vase, wenn der Graph nur im ersten Quadranten betrachtet wird. Die Längeneinheit beträgt 1 Dezimeter. Die Vase wird nun so aufgestellt, dass ihre Rotationssymmetrieachse senkrecht steht. Die „Spitze“ steht im Ursprung und an der obersten Stelle wird die Vase mit einem kleinen Loch versehen. Sie wird mit der konstanten Rate 1 Liter pro Minute gefüllt.

a) Wie lange dauert der Füllprozess?
b) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
c) Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher „Höhe“ wird sie erreicht?

Lösung:

a) Der Hochpunkt des Graphen zu f lautet H($\sqrt{2}$;2). Das Vasenvolumen beträgt 13.40..l. Also dauert der Füllprozess 13.40..Minuten.

b) $v = \frac{h}{t}$ ergibt 0.149...dm/min.

c) Die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit wird in der Höhe $\sqrt{2}$ dm erreicht. An dieser Stelle ist der Berandungsbauch am dicksten (vgl. a). Die momentane Pegelgeschwindigkeit beträgt $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \frac{dm}{\min}$.

III 6 *Das Silo*

Durch die Rotation des Graphen zu f(x)=sin(x)+2 im Intervall [0;5] um die x-Achse entsteht, aufrecht hingestellt, ein Silo (Längeneinheit: m). Dieses wird mit der konstanten Rate 2 Kubikmeter pro Minute gefüllt.

a) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
b) Berechne die extremalen momentanen Pegelgeschwindigkeiten.
Bei welcher „Füllhöhe“ werden sie erreicht?

Lösung:

Diese Aufgabe löst man analog zu Aufgabe 2. An der Maximalstelle der Sinusfunktion ($\frac{\pi}{2}$) ist die momentane Pegelgeschwindigkeit minimal und an der Minimalstelle der Sinusfunktion ($\frac{3\pi}{2}$) ist sie maximal. Die mittlere Pegelgeschwindigkeit beträgt $v = \frac{h}{t} = 0{,}12..\frac{m}{\min}$. Die maximale momentane Pegelgeschwindigkeit beträgt $v_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{\min}$ und die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit $v_{\min} = \frac{2}{9 \cdot \pi} \frac{m}{\min}$.

III 7 *Der Weinkelch*

Die Punkte P(0|2) und R(4|1) begrenzen eine Strecke. Vom Punkt R zum Punkt T(9|3) verläuft der Graph einer Funktion vom Typ mit dem Term $a + b \cdot \sqrt{x}$. Durch die Rotation der stückweise definierten Funktion um die x-Achse entsteht ein Weinkelch, der aufrechtstehend gefüllt wird (Längeneinheit: 1cm). Die Füllrate beträgt 1cm^3/s. In welcher Höhe beträgt die momentane Pegelgeschwindigkeit $\frac{16}{25\pi}\frac{cm}{s}$?

Lösung:
Die Funktion ist abschnittsweise definiert. Im Intervall [0;4] lautet der Funktionsterm f(x) = –0.25x +2, im Intervall [4;9] f(x) = -3 + 2$\sqrt{x}$. Das Volumen beträgt 101.57...π cm^3.
$\frac{dV}{dx} = \frac{25\pi}{16}cm^2$ ergibt mit $\pi \cdot (-0.25x + 2)^2$ = $\frac{dV}{dx} = \frac{25\pi}{16}$ als Höhe 3cm.

III 8 *Eine exponentielle Vase*

a) Durch die Rotation des Graphen zu f(x)= x·exp(-x) um die x-Achse im Intervall[0;6] entsteht eine flache Vase. Diese wird aufrecht hingestellt und mit 1l/min befüllt. Eine Längeneinheit beträgt 1dm. Wie lange dauert der Füllprozess? Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit? Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher „Höhe“ wird sie erreicht?
b) Löse die Aufgabe a) für die Funktionsschar mit dem Term $f(x) = x^n \cdot \exp(-x)$ (n = 1,2,3,4,5). Auf welcher Ortskurve liegen die minimalen momentanen Pegelgeschwindigkeiten?

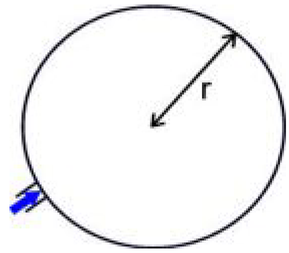
Lösung:
a) Das Volumen beträgt 0.78...l. Also dauert die Befüllung 0.78...Min. und die mittlere Pegelgeschwindigkeit beträgt 6dm/0.78...min. = 7.69...dm/min .
Die Funktion mit dem Term f(x) =x ·exp(-x) hat die Maximalstelle x_{max} = 1.
An dieser Stelle ist auch V'(x) = $\pi \cdot f^2(x)$ maximal und die momentane Pegelgeschwindigkeit minimal. $\frac{dV}{dx} = \pi \cdot x^2 \cdot \exp(-2x)$ hat hier den Wert
$\frac{\pi}{e^2}$ dm^2. Die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit beträgt $\frac{e^2}{\pi}\frac{dm}{\min}$.
b) Diese Aufgabe löst man wie die Teilaufgabe a). Die gesuchte Ortskurve hat die Gleichung y=x.

IV 2 *Der Luftballon mit veränderlichem Zufluss*

Wir betrachten nun einen zunächst leeren Luftballon in den Luft mit der sich ändernden Zuflussgeschwindigkeit von $\frac{dV}{dt} = 2 \cdot t$ in $\frac{ml}{s}$ einströmt.
Der Luftballon soll dabei stets eine Kugelform haben.

a) Wie groß ist der Radius des Luftballons nach 3s?
b) Wie schnell ändert sich der Radius des Luftballons nach 3*s*?
c) Wann hat der Luftballon das Volumen von $400cm^3$?

Lösung:



Gegebene Zuflussrate: $\frac{dV}{dt} = 2 \cdot t$

Kettenregel: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$

Mit dem Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Ableitung $\frac{dV}{dr} = 4\pi \cdot r^2$ erhält man durch Umformung der Kettenregel $\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} = \frac{2 \cdot t}{4\pi \cdot r^2}$.

Die entstandene Differentialgleichung wird mittels Separation der Variablen gelöst. Dazu integrieren wir $2\pi \cdot r^2 \cdot r' = t$.

Es folgt: $\int 2\pi \cdot r^2 \cdot r'\, dt = \int t\, dt + c \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{2}t^2 + c$

Da für $t = 0$ der Radius $0cm$ beträgt, ist die Integrationskonstante $c = 0$ und wir können die Lösungsfunktion der Differentialgleichung durch Auflösen nach r bestimmen: $r(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}t^2}$

Ihre Ableitungsfunktion beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich der Radius ändert: $\frac{dr}{dt} = r'(t) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi \cdot t}}$

3*s* nach dem Start beträgt der Radius $r(3s) = \frac{3}{\sqrt[3]{4\pi}}cm \approx 1{,}29cm$, er ändert sich dann mit einer Geschwindigkeit von $r'(3s) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{4\pi}} \frac{cm}{s} \approx 0{,}29 \frac{cm}{s}$.

Zur Lösung des Aufgabenteils c) setzt man die Lösungsfunktion der Differentialgleichung und das vorgegebene Volumen in die Formel für das Kugelvolumen ein: $\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}t^2}\right)^3 = 400$ mit $t^2 = 400$ ergibt sich das gesuchte Volumen unter Ausschluss der negativen Lösung nach 20s.

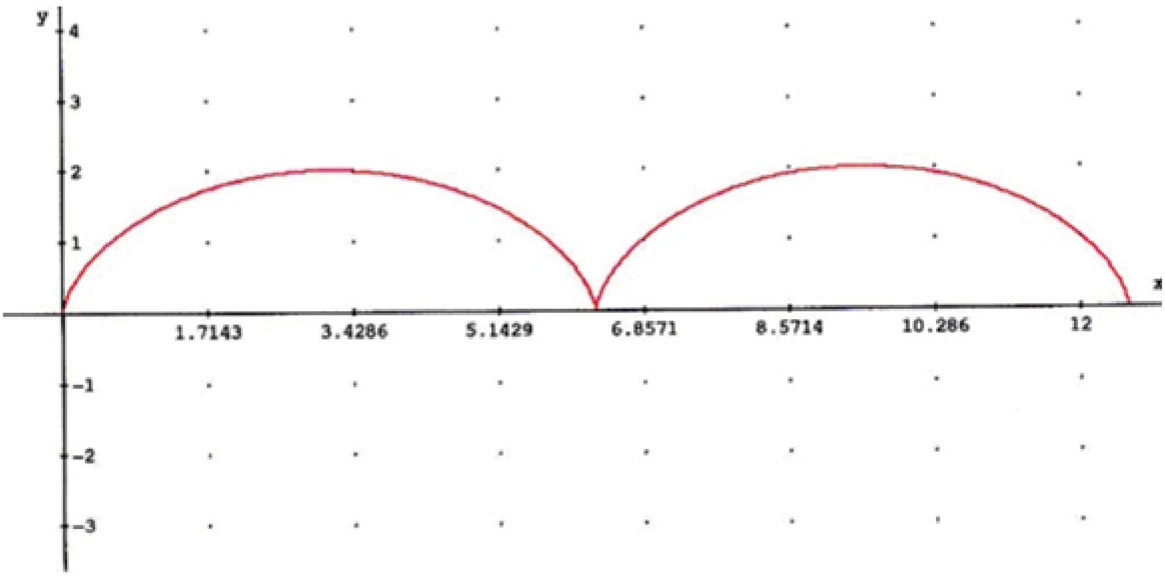
V 2 *Die gemeine Zykloide*

Die gemeine Zykloide ist die einfachste Rollkurve der Welt.
K = { (x,y) | x = $\varphi(t) = t - \sin(t), y = \psi(t) = 1 - \cos(t), t \geq 0$} ist die Parameterdarstellung der gemeinen Zykloide.

a) Zeichne die Zykloide mit DERIVE.
b) Bestimme die Bogenlänge der gemeinen Zykloide im Intervall [0;2π].
   Tipp: Zeige: $1 - \cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$
c) Zeige: $\frac{dy}{dx} = \cot\left(\frac{t}{2}\right)$

Lösung:

a)



b) s = $\int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2\cos(t))dt} = 2\int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2})dt = 4\int_0^{2\pi} \sin(z)dz = 8.$

c) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$; $\frac{dy}{dt} = \sin(t) = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$.

Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = \cot(t/2)$.

V 3 *Die Parabola Nodata*

K={ (x,y) | $x=\varphi(t)=t^2, \quad y=\Psi(t)=\frac{1}{4}\cdot t\cdot\left(4-t^2\right), t\geq 0$ } ist die Parameterdarstellung eines Astes der Knotenparabel oder der Parabola nodata.

a) Bestimme eine explizite Darstellung von y = f(x).
b) Bestimme die Extrema des Graphen von f.
c) Bei der Rotation um die x-Achse erzeugt der Graph eine spitze Birne, wenn man diesen nur im ersten Quadranten betrachtet. Berechne das Volumen der Birne (eine Einheit = 1dm).
d) Die Birne wird so aufgestellt, dass die Rotationsachse senkrecht steht. Der Bauch der Birne ist dabei unten. Es sollen jetzt $\frac{\pi}{3}$ Liter Wasser pro Minute in diesen Körper fließen. Berechne die Fülldauer.
e) Wie groß ist die mittlere Pegelgeschwindigkeit?
f) Berechne die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit. Bei welcher Höhe x wird sie erreicht?

Lösung:

a) $y=f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x}\cdot(4-x)$

b) Der Hochpunkt des Graphen lautet: H($\frac{4}{3}$ I f($\frac{4}{3}$)).

c) V_{rot} = $\frac{4}{3}$l.

d) t = 4Minuten.

e) Die mittlere Pegelgeschwindigkeit beträgt 1dm/min .

f) Die minimale momentane Pegelgeschwindigkeit wird bei $\frac{4}{3}$ dm erreicht (vgl. a) und b)) . Sie beträgt $\frac{9}{16}\frac{dm}{\min}$.

V 4 *Martin Gardner trifft Jacob Bernoulli via DERIVE*

Der DERIVE-befehl

$[[2\cdot\sqrt{(t+t^2)},2\cdot\sqrt{(t-t^2)}],[-2\cdot\sqrt{(t+t^2)},-2\cdot\sqrt{(t-t^2)}],$

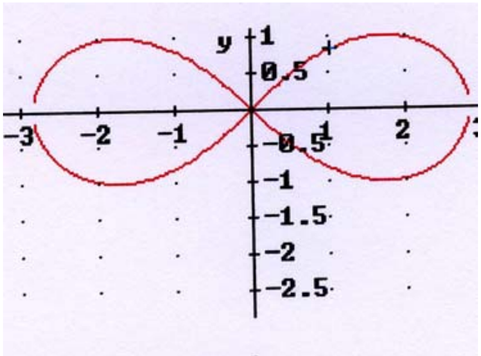
$[2\cdot\sqrt{(t+t^2)},-2\cdot\sqrt{(t-t^2)}],[-2\cdot\sqrt{(t+t^2)},2\cdot\sqrt{(t-t^2)}]]$

erzeugt eine Bernoulli-Kurve.

a) Zeichne mit Derive diese Bernoulli-Kurve. (Für mathematische Gourmets: Dies ist nicht die Kurve, die sich auf dem Grabstein des Jacobus Bernoulli im Basler Münster befindet).
b) Formuliere für die obige Kurve eine zu Aufgabe1) analoge Related-Rates-Aufgabe und löse sie.

Lösung:

Dies ist eine Cassini-Kurve. Es handelt sich um eine Bernoulli-Lemniskate. Auf dem Grabstein Jacob Bernollis im Basler Münster wurde fälschlicherweise eine archimedische Spirale eingemeißelt.

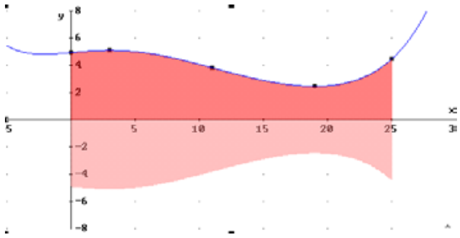


VI 2 *Befüllung einer Glaskaraffe*

Bestimme die Pegelgeschwindigkeit bei der Befüllung der Karaffe experimentell. Vergleiche das Ergebnis mit einem geeigneten mathematischen Modell, bei dem die Karaffe als Rotationskörper mit einer geeigneten Randfunktion untersucht wird.
Im Video wird die Litermarkierung bei einer Höhe von 19*cm* erreicht.
Gesamthöhe der Karaffe: 26*cm*

Lösung:
Die Auswertung der Videodatei mit Excel liefert das unten dargestellte Diagramm für die Pegelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe.
Die Exceldatei steht im Internet zur Verfügung.

Für das mathematische Modell wird zunächst der Term einer ganzrationalen Funktion 6. Grades für die Berandungsfunktion des Rotationskörpers aus geeignet gewählten Stützstellen mit DERIVE berechnet. (Derivedatei)



Bei der Füllhöhe von 19*cm*, also nach etwa 44,6*s* wurde die Litermarkierung auf der Karaffe erreicht. Bei Annahme einer konstanten Füllrate beträgt diese:

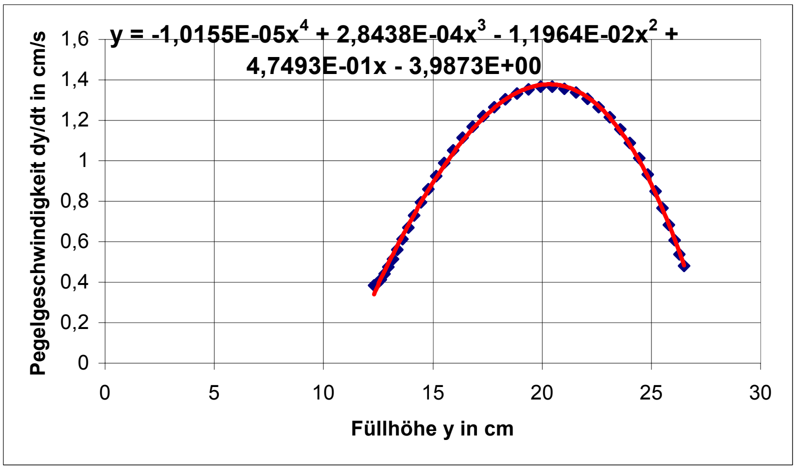
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1000cm^3}{44{,}6s} \approx 22{,}42\,\tfrac{cm^3}{s}$$

Für die Pegelgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe erhält man damit:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dx}} = \frac{22{,}42\,\frac{cm^3}{s}}{\pi \cdot (f(x))^2}$$

Den Graphen der so erhaltenen Funktion kann man zeichnen und mit dem zuvor bei Excel erhaltenen Graphen vergleichen.

Excel:



Derive: